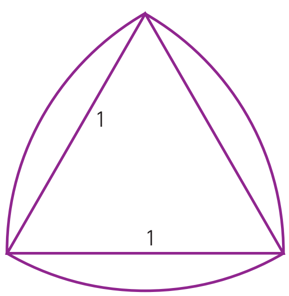
Été-automne2010 Solutions

Triangle de Reuleaux

1. Chaque côté du triangle de Reuleaux a pour longueur $\frac{1}{6}$ du périmètre d'un cercle de rayon 1.

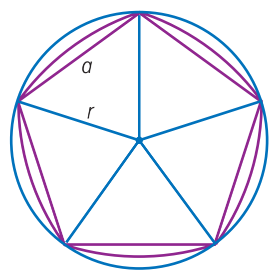
   Donc le périmètre du triangle de Reuleaux est
   $$P=3\times\frac{1}{6}\times 2\pi=\pi$$
   soit exactement le périmètre d'un cercle de diamètre 1.



   Le cas du pentagone est identique puisque chaque côté est un arc sous-tendu par un angle de $\pi/5$.

2. a) L'aire du cercle de diamètre 1 est
   $$\frac{\pi}{4}=0{,}7854.$$
   Le triangle de Reuleaux est la réunion d'un triangle équilatéral de côté 1, et de trois petites portions de disques délimités par un segment dont les extrémités sont un arc sous-tendu par un angle de $\pi/3$ rad. Le triangle équilatéral a pour aire
   $$T=\frac{\sqrt{3}}{4}.$$
   Calculons l'aire d'un secteur de cercle de rayon 1 et d'angle $\pi/3$. Cette aire est 1/6 de l'aire du disque, soit
   $$A_1=\frac{\pi}{6}.$$
   Chacune des portions de disque a donc pour aire $A_2 = A_1 - T$.
   Donc l'aire du triangle de Reuleaux est
   $A = T + 3(A1 - T) = 3A1 - 2T = 0{,}7048$.

   b) On utilise la même technique qu'un numéro précédent, mais il faut travailler un peu plus. Soit P, l'aire du pentagone et A_2, l'aire de chacune des petites portions circulaires. L'aire cherchée est $A = P + 5A_2$, et il faut donc calculer P et A_2.



   Prenons maintenant le secteur circulaire centré à un sommet, d'angle $\pi/5$, se terminant à deux autres sommets du pentagone de Reuleaux. Il a pour aire
   $$S=\frac{\pi}{10}.$$
   L'aire du triangle qu'il contient est
   $$A_1=\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10}.\ \text{Alors, } A_2 = S - A_1.$$

Calcul de P : Le pentagone est inscrit dans un cercle de rayon r, centré en point O. En joignant les sommets au point O, on divise le pentagone en 5 triangles isocèles dont l'angle en O est

$2\pi/5$ et les côtés partant de O ont longueur r. Chacun de ces triangles a donc pour aire

$$T = r^2 \sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}.$$

Donc, $P = 5r^2 \sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}$. Il faut calculer r.

Regardons le triangle impliqué ci-dessus d'aire A_1. Ce triangle a deux côtés de longueur 1 séparés par un angle de $\pi/5$. Donc, le troisième côté a pour longueur $a = 2\sin\frac{\pi}{10}$.

Ce nombre a représente la longueur du côté du pentagone. Regardons maintenant un de nos 5 triangles isocèles de sommet en O, et divisons-le en 2 triangles rectangles en abaissant la hauteur à partir de O. L'hypoténuse de ces triangles rectangles est de longueur

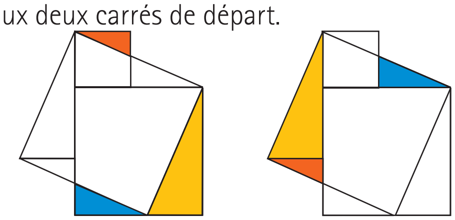
$$r = \frac{a}{2\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{\sin\frac{\pi}{10}}{\sin\frac{\pi}{5}}.$$

Donc,

$$A = 5\sin^2\frac{\pi}{10}\cot\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{2} - 5\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10}$$
$$= 0{,}7585.$$

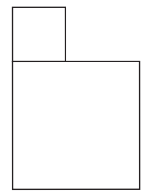
Sommes pythagoriciennes

1. Les trois régions extérieures au carré sur l'hypoténuse sont les régions extérieures par rapport aux deux carrés de départ.

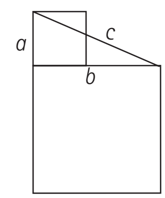


2. Dans la partie précédente, on tenait pour acquis que la figure en cause « existe », en ce sens que le carré sur l'hypoténuse se superpose bel et bien aux deux autres carrés de la manière indiquée. Mais comment ce carré a-t-il été construit au juste? Quelles sont les propriétés de ses points, notamment du point P, le coin inférieur droit du carré? Sous quelles hypothèses a-t-il été obtenu?

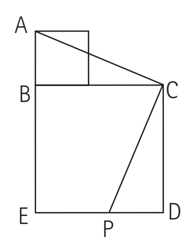
On pourrait décortiquer la « géométrie » de cette figure comme suit. Partant de deux carrés d'aires a^2 et b^2 que l'on dispose comme suit,



on relie deux des sommets de manière à former le triangle rectangle de cathètes a et b et d'hypoténuse c.

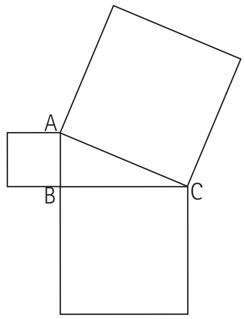


On voit déjà le carré sur l'hypoténuse qui se profile. On pourrait rendre la chose plus explicite en reproduisant le triangle ABC dans le coin inférieur droit du grand carré, de manière à avoir deux des côtés du carré sur l'hypoténuse ainsi que l'angle droit — n'est-ce pas? — qu'ils renferment.

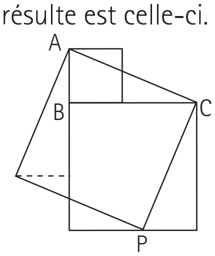


Dans un tel contexte, il ne fait aucun doute que le point P se trouve sur le côté ED, puisque, par construction même, les triangles ABC et PDC sont congruents.

Le but de la question 2, telle que formulée, est d'introduire le carré sur l'hypoténuse à l'aide d'une autre construction. Partant de la « configuration usuelle » du théorème de Pythagore,



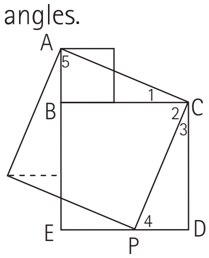
on effectue d'une part la réflexion du carré sur AB dans ce côté, et d'autre part la réflexion du carré sur l'hypoténuse dans celle-ci. Cela revient en quelque sorte à « plier » la figure le long de ces côtés. Nous prétendons que la figure qui en résulte est celle-ci.



Mais qu'est-ce qui nous assure, entre autres, que le coin supérieur droit du carré sur l'hypoténuse s'est bien retrouvé en P, sur le côté du carré au bas de la figure?

Nous allons d'abord montrer que le point P ainsi obtenu détermine un triangle rectangle congruent au triangle ABC.

a) Afin de démontrer que les triangles ABC et PDC sont congruents, considérons tout d'abord les angles.

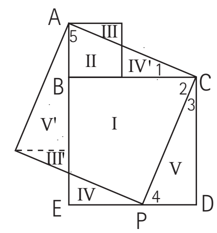


Les angles 1 et 2 sont complémentaires, car ils forment un des angles du carré sur l'hypoténuse. Mais les angles 2 et 3 sont eux aussi complémentaires (carré BCDE), de sorte que 1 et 3 sont congruents. Par ailleurs, les angles 1 et 5 sont complémentaires, car le triangle ABC est rectangle. Les angles 2 et 5 sont donc congruents, et ils sont aussi congruents à 4, par un raisonnement analogue.

On sait par ailleurs que PC est congruent à AC, car PC est l'image par réflexion d'un côté du carré sur AC. On en tire donc la congruence des triangles ABC et PDC (cas ACA).

b) Le fait que P soit un sommet du triangle rectangle dont l'un des cathètes est le côté CD du carré sur BC montre que P est bien sur le côté DE de ce même carré.

c) De là, il est facile de compléter l'analyse de la figure afin de montrer que le carré sur AC a comme aire la somme des aires des carrés sur AB et sur BC.



Cela tient au fait que les triangles rectangles III, III′, IV, IV′, V, V′ sont tous semblables (regardez leur angles). On peut alors en conclure, en regardant leurs côtés, qu'ils sont congruents deux à deux. Par exemple, la congruence de III et III′ découle du fait que le grand cathète de ces deux triangles est le côté *a* du petit carré. On voit alors que l'aire des deux carrés initiaux correspond aux régions I, II, III, IV et V, alors que l'aire du carré sur l'hypoténuse correspond à I, II, III′, IV′ et V′, ce qui donne le résultat demandé.

Note : Une telle démarche repose donc sur l'identification d'une hypothèse à partir de laquelle la figure au cœur de cette question a été bâtie. Ici, on a privilégié l'idée de partir de la « configuration habituelle » du théorème de Pythagore et de faire la réflexion de certains carrés dans un de leurs côtés. Une autre construction serait par exemple de partir à nouveau de la « configuration habituelle » du théorème de Pythagore et de prolonger le côté du carré sur l'hypoténuse passant par C jusqu'à ce qu'il rencontre en un point P le côté au bas de la figure. Nous savons alors implicitement que P est sur ce côté, et ce qu'il faut maintenant montrer est que PC est de même longueur que AC (ce qui était implicite dans le cas de la réflexion dans AC).

Triplets pythagoriciens

1.

m	Triplet pythagoricien
3	5, 4, 3
5	13, 12, 5
7	25, 24, 7
9	41, 40, 9
11	61, 60, 11

2.

m	Triplet pythagoricien
2	5, 3, 4
3	10, 8, 6
4	17, 15, 8
5	26, 24, 10
6	37, 35, 12
7	50, 48, 14
8	65, 63, 16
9	82, 80, 18
10	101, 99, 20
11	122, 120, 22

3. $21^2 + 20^2 = 29^2$.