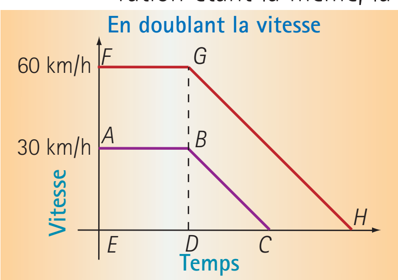
Solutions Été–automne 2009

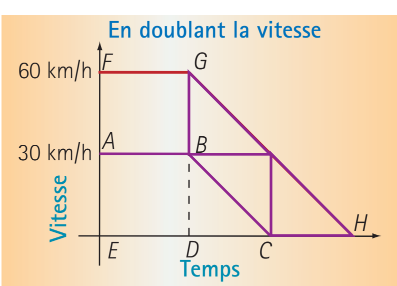
Distance de freinage

1. En doublant la vitesse, on double la hauteur dans la représentation graphique. La décélération étant la même, la pente du segment de droite représentant la vitesse ne change pas, mais la hauteur et la base du triangle dont l'aire représente la distance de freinage sont doublés.



a) La distance de réaction à 30 km/h est représentée par l'aire du rectangle *ABDE*. Si le temps de réaction est le même et que la vitesse est de 60 km/h, la distance de réaction est représentée par l'aire du rectangle *FGDE* qui est le double de celle du rectangle *ABDE*. Par conséquent, la distance de réaction est multipliée par 2 si la vitesse est le double de la limite permise.
La distance de freinage à 30 km/h est représentée par l'aire du triangle *BDC*. La hauteur *DG* est le double de *DB*. De plus, puisque la décélération est la même, la base *DH* du triangle *GDH* est le double de la base *DC*. L'aire du triangle *GDH* est donc :

$$A_{GDH}=\frac{\overline{DG}\times\overline{DH}}{2}=\frac{2\overline{DB}\times 2\overline{DC}}{2}$$
$$=4\times\frac{\overline{DB}\times\overline{DC}}{2}=4A_{BDC}.$$



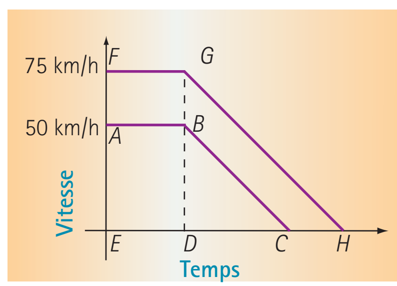
Par conséquent, la distance de freinage est multipliée par 4 si la vitesse est le double de la limite permise.

Au total, si la vitesse est le double de la limite permise, la distance de réaction est doublée et la distance de freinage est quadruplée.

b) La voiture circule à 25 km/h au-dessus de la limite permise, soit un dépassement de :

$$\frac{25}{50}\times 100=50\%$$

de la limite permise.



Le taux d'augmentation de la distance de réaction est représenté par le rapport de l'aire du rectangle *ABGF* sur le rectangle *ABDE* exprimé en pourcentage.
La base des rectangles est la même, c'est le temps de réaction représenté par *ED*. La hauteur du rectangle *ABGF* est la moitié de celle du rectangle *ABDE*. Le rapport des aires en pourcentage est alors :

$$\frac{A_{ABGF}}{A_{ABDE}}=\frac{\overline{DE}\times\overline{AF}}{\overline{DE}\times\overline{AE}}\times 100=\frac{\overline{AF}}{\overline{AE}}\times 100=50\%$$

Le taux d'augmentation de la distance de freinage est représenté par le rapport de l'aire du trapèze *BCHG* sur celle du triangle *BCD* exprimé en pourcentage.

L'aire du trapèze est la différence des aires des triangles *BCD* et *GHD*. On a alors :

$$\begin{aligned} A_{GHCB} = A_{GHD} - A_{BCD} &= \frac{\overline{DG}\times\overline{DH}}{2} - \frac{\overline{DB}\times\overline{DC}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\overline{DG}\times\overline{DH} - \overline{DB}\times\overline{DC}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\overline{DB}\times\frac{3}{2}\overline{DC} - \overline{DB}\times\overline{DC}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{9}{4}\overline{DB}\times\overline{DC} - \overline{DB}\times\overline{DC}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}\overline{DB}\times\overline{DC}\right) \\ &= \frac{5}{8}\overline{DB}\times\overline{DC}. \end{aligned}$$

Le rapport des aires est alors :

$$\frac{A_{GHCB}}{A_{BCD}} = \frac{\frac{5}{8}\overline{DB}\times\overline{DC}}{\frac{1}{2}\overline{DB}\times\overline{DC}}\times 100 = \frac{10}{8}\times 100 = 125\%.$$

c) Un taux d'augmentation de 100% signifie que la valeur est le double de ce qu'elle était. Dans le cas présent, le taux est de 125%, la distance de freinage a plus que doublé.

d) On doit déterminer la distance en mètres parcourue par une voiture roulant à 50 km/h. La vitesse en mètres par seconde est :

$$50\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{50\ 000}{3600}\frac{\text{m}}{\text{s}} = 13{,}\overline{8}.$$

Pour un temps de réaction de une seconde, la distance parcourue est de $13{,}\overline{8}$ m.

La vitesse en mètres par seconde d'une voiture roulant à 75 km/h est :

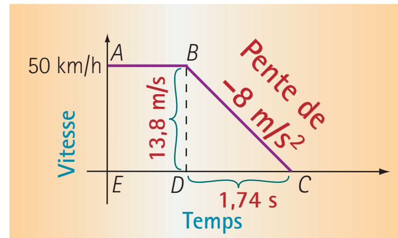
$$75\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{75\ 000}{3600}\frac{\text{m}}{\text{s}} = 20{,}8\overline{3}.$$

Pour un temps de réaction de une seconde, la distance parcourue est de $20{,}8\overline{3}$ m, soit environ 7 mètres de plus qu'à 50 km/h.

e) On a vu dans l'article que le temps de freinage est $t_f = -v_i/a$. Sur pavé glacé l'accélération de freinage est de –8 m/s^2 et la vitesse de la voiture de 13,8 m/s (50 km/h). Le temps de freinage est donc :

$$t_f = \frac{-v_i}{a} = \frac{-13{,}\overline{8}\text{ m/s}}{-8\text{ m/s}^2.} \approx 1{,}74\text{ s.}$$

La distance de freinage est représentée par l'aire du triangle *BCD*.



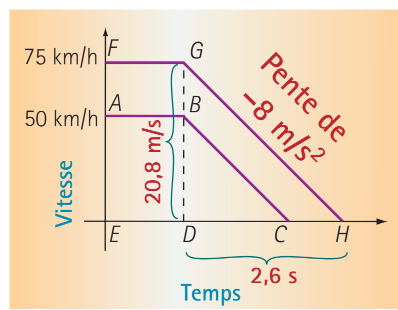
On obtient alors :

$$d_f = \frac{v_i\times t_f}{2} = \frac{13{,}\overline{8}\text{ m/s}\times 1{,}74\text{ s.}}{2} = 12{,}0\text{ m.}$$

Si la vitesse de la voiture est d'environ 20,8 m/s (75 km/h). Le temps de freinage est :

$$t_f = \frac{-v_i}{a} = \frac{-20{,}8\text{ m/s}}{-8\text{ m/s}^2.} \approx 2{,}6\text{ s.}$$

La distance de freinage est représentée par l'aire du triangle *GHD*.



On obtient alors :

$$d_f = \frac{v_i\times t_f}{2} = \frac{20{,}8\text{ m/s}\times 2{,}6\text{ s.}}{2} = 27{,}04\text{ m.}$$

À 50 km/h, la distance totale en mètres est :

13,8 + 12 = 25,8 m.

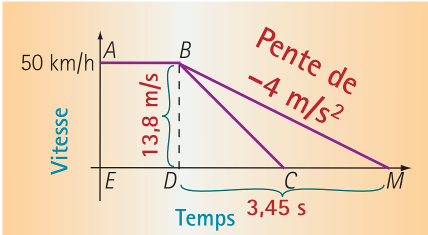
À 75 km/h, la distance totale en mètres est :

20,8 + 27,04 = 47,84 m.

f) À 50 km/h, sur pavé humide l'accélération de freinage est de –4 m/s^2 et la vitesse de la voiture est de 13,8 m/s. Le temps de freinage est donc :

$$t_f = \frac{-v_i}{a} = \frac{-13{,}\overline{8}\text{ m/s}}{-4\text{ m/s}^2.} \approx 3{,}45\text{ s.}$$

La distance de freinage est représentée par l'aire du triangle *BMD*.



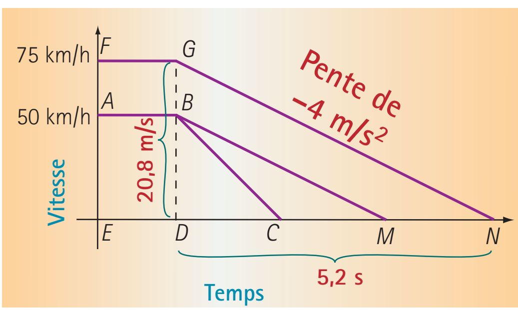
On obtient alors :

$$d_f = \frac{v_i \times t_f}{2} = \frac{13,\overline{8}\ \text{m/s} \times 3,45\ \text{s.}}{2} = 23,8\ \text{m}$$

Si la vitesse de la voiture est d'environ 20,8 m/s (75 km/h). Le temps de freinage est :

$$t_f = \frac{-v_i}{a} = \frac{-20,8\ \text{m/s}}{-4\ \text{m/s}^2.} \approx 5,2\ \text{s.}$$

La distance de freinage est représentée par l'aire du triangle *GHD*.



On obtient alors :

$$d_f = \frac{v_i \times t_f}{2} = \frac{20,8\ \text{m/s} \times 5,2\ \text{s.}}{2} = 54,08\ \text{m.}$$

À 50 km/h, la distance totale en mètres est :

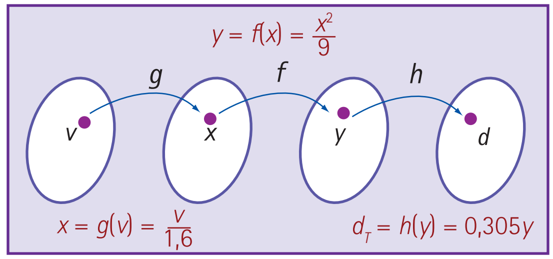
$$13,8 + 23,8 = 37,6\ \text{m.}$$

À 75 km/h, la distance totale en mètres est :

$$20,8 + 54,08 = 74,88\ \text{m.}$$

2. Pour comparer la formule d'estimation des ingénieurs américains au modèle plus précis tenant compte de la distance de réaction et de la distance de freinage, il faut d'abord exprimer les deux modèles en utilisant les mêmes unités. Dans un premier temps, on traduit le modèle des ingénieurs en km/h.

a) On peut considérer comme une composition de fonctions l'application des différentes transformations nécessaires pour obtenir à partir de la formule américaine un estimé en mètres de la distance totale parcourue pour une vitesse initiale donnée en km/h. Le diagramme suivant précise ces transformations.



La fonction *g* transforme la vitesse initiale *v* (en km/h) en une vitesse *x* (en milles/heure (mph)). La fonction *f* associe à cette vitesse *x* la distance *y* en pieds calculée par la formule américaine. La fonction *h* transforme cette valeur en mètres (m). En composant ces différentes fonctions, on peut en déduire une façon directe de retrouver la distance totale (en m) parcourue en fonction de la vitesse[1] (en km/h).

$$d_T(v) = f(f(g(v))) = h\left(\frac{1}{9}\left(\frac{v}{1,6}\right)^2\right)$$

$$= \frac{0,305v^2}{9 \times 1,6^2} = \frac{v^2}{75,54}.$$

Il s'agit donc de comparer cette fonction quadratique de la distance totale parcourue (en m) en fonction de la vitesse initiale (en km/h) avec l'autre fonction quadratique définie pour le même but dans l'article :

$$d_2(v) = \frac{v \times 1}{3,6} - \frac{\left(\frac{v}{3,6}\right)^2}{2 \times (-4)}.$$

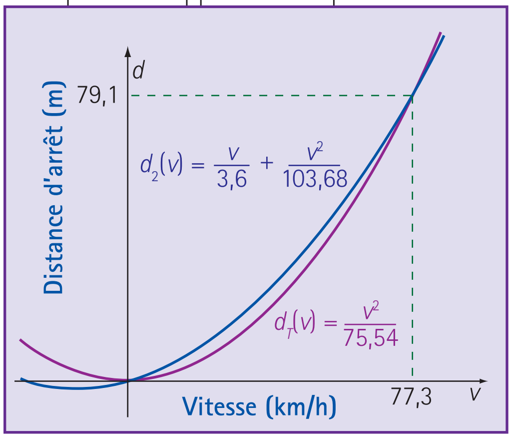
car on a supposé un temps de réaction de 1 seconde (t_r = 1 s) et une route mouillée où $a = -4$ m/s². (Rappelons que la division par 3,6 sert à transformer la vitesse en km/h en vitesse en m/s.)

En simplifiant :

$$d_2(v) = \frac{v}{3,6} + \frac{\left(\frac{v}{3,6}\right)^2}{8} = \frac{v}{3,6} + \frac{v^2}{103,68}.$$

1. Pour simplifier l'écriture, les calculs ont été faits en valeur approchée avec une utilisation plutôt « libérale » (voire même abusive...) du signe « = »...

a) La représentation graphique des deux fonctions nous permet d'apprécier leur proximité.



Évidemment, seules les valeurs du premier quadrant nous intéressent pour le problème.

b) Nous cherchons la valeur de v pour laquelle la distance d'arrêt des ingénieurs américains ($d_T(v)$) est égale à la distance réelle telle que $d_T(v) = d_2(v)$, ce qui équivaut à résoudre l'équation :

$$\frac{v^2}{75,54} = \frac{v}{3,6} + \frac{v^2}{103,68}.$$

$v = 0$ constitue clairement une première solution. Pour trouver l'autre solution ($v \neq 0$), on peut diviser par v les deux membres de l'égalité (puisqu'on suppose maintenant cette vitesse différente de zéro) et obtenir une équation du premier degré :

$$\frac{v}{75,54} = \frac{1}{3,6} + \frac{v}{103,68}.$$

En résolvant, on trouve $v = 77,3$ km/h.
Pour une vitesse initiale de 77,3 km/h, les deux formules donnent le même estimé de distance d'arrêt (79,1 m). Cela correspond au second point d'intersection des deux courbes (autre que l'origine).

Mathémagique

Il y a plusieurs méthodes. Une méthode simple consiste à construire une table d'addition à partir de dix nombres dont la somme est l'année de naissance du spectateur. Par exemple, si l'année de naissance est 1998, on l'exprime comme somme de nombres différents :

1998 = 11 + 24 + 45 + 150 + 167 + 198 + 230 + 248 + 260 + 665.

Puis, on fait une table d'addition en disposant nos dix nombres de manière désordonnée.

+	167	45	230	150	248
11	178	56	241	161	259
665	832	710	895	815	913
24	191	69	254	174	272
198	365	243	428	348	446
260	427	305	490	410	508

Cela est un peu long ... mais donne un résultat qui pourra surprendre les spectateurs ! Le carré que l'on obtient est assez compliqué pour être intriguant.

178	56	241	161	259
832	710	895	815	913
191	69	254	174	272
365	243	428	348	446
427	305	490	410	508

Théorème de Sophie Germain

Soit $n^4 + 4$. En additionnant et en soustrayant $4n^2$, on obtient une différence de carrés que l'on peut factoriser.

$$\begin{aligned} n^4 + 4 &= n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 \\ &= (n^4 + 4n^2 + 4) - 4n^2 \\ &= (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 \\ &= (n^2 + 2 - 2n)(n^2 + 2 + 2n) \\ &= (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2) \end{aligned}$$

$n^4 + 4$ est donc le produit de deux nombres, il faut montrer qu'aucun de ces nombres n'est égal à 1 pour pouvoir conclure que $n^4 + 4$ n'est pas premier. Procédons par l'absurde.

Supposons que $n^2 - 2n + 2 = 1$, alors :

$$n^2 - 2n + 1 = 0,$$

et en factorisant :

$$(n - 1) = 0.$$

Mais cela est impossible puisque n est strictement plus grand que 1 et $n^2 - 2n + 2$ ne peut égaler 1.

Supposons que $n^2 + 2n + 2 = 1$, alors :

$$n^2 + 2n + 1 = 0,$$

et en factorisant :

$$(n + 1) = 0.$$

Mais cela est impossible puisque n est strictement plus grand que 1 et $n^2 + 2n + 2$ ne peut égaler 1.

Par conséquent, pour tout entier $n > 1$, $n^4 + 4$ est toujours le produit de deux entiers différents de 1, il n'est donc jamais premier.