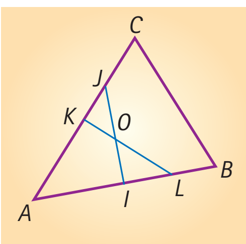
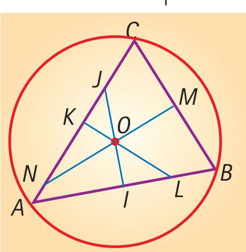
Solutions hiver-printemps 2009

Droite d'Euler

1. Soit ABC, un triangle quelconque. Traçons les médiatrices *IJ* et *KL* des côtés *AB* et *AC* qui se rencontrent en *O*.

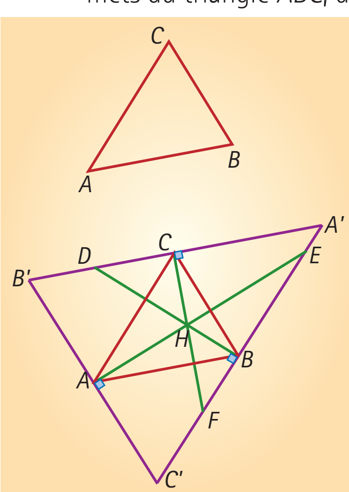


Puisque *IJ* est la médiatrice de *AB*, tous ses points sont équidistants des sommets *A* et *B*. De même, tous les points de *KL* sont équidistants de *A* et de *C*.

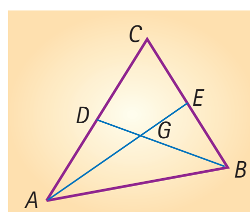


Par conséquent, *O* est équidistant de *B* et de *C*. C'est donc un point de la médiatrice du côté *BC* et les trois médiatrices se rencontrent en *O*.
Puisque le point *O* est équidistant des trois sommets, c'est le centre du cercle circonscrit au triangle.

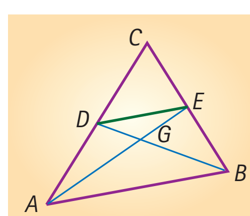
2. Dans la figure, on a tracé, par chacun des sommets du triangle *ABC*, une parallèle au côté opposé pour former le triangle *A'B'C'*. Puis, on a tracé les médiatrices du triangle A'B'C '. En effet, le point C est le point milieu du côté A'B' et le segment CF est perpendiculaire à A'B'. Maintenant, puisque AB et A'B' sont parallèles, le segment CF est donc la perpendiculaire à AB abaissée du sommet C. C'est donc une hauteur du triangle ABC. De la même façon, on montre que la médiatrice *AE* est la hauteur du triangle *ABC* abaissée du sommet *A* sur le côté *BC*. De plus, la médiatrice *BD* est également la hauteur du triangle *ABC* abaissée du sommet *B* sur le côté *AC*. Les médiatrices du triangle *A'B'C'* se rencontrent en un même point et c'est également le point de rencontre des hauteurs du triangle *ABC*.



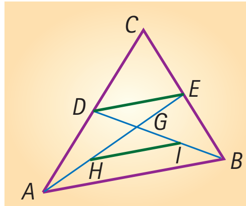
3. Dans le triangle *ABC*, on trace les médianes *AE* et *BD* et on note *G* le point de rencontre de celles-ci.



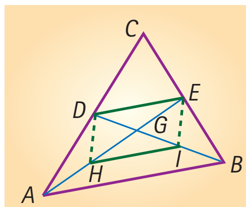
Le segment de droite *DE* joint les points-milieux des côtés *AC* et *BC*, il est parallèle à *AB* et sa mesure est la moitié de celle de *AB* par le théorème de Thalès.



Dans le triangle *AGB*, on détermine les points-milieux *H* et *I* des côtés *AG* et *BG*.



Le segment *HI* est alors parallèle à *AB* et sa mesure est la moitié de celle de *AB*. Par conséquent, *DEIH* est un parallélogramme.

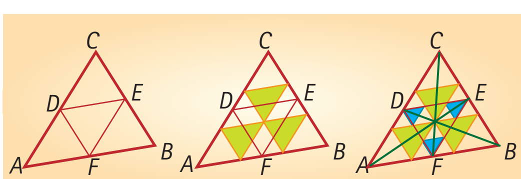


Puisque les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu, on a m*HG* = m*GE* et, puisque *H* est le point milieu de *AG* par construction, m*AH* = m*HC*. D'où, m*AH* = m*HC* = m*GE* et le point de rencontre *G* des deux médianes est situé aux deux tiers de leur longueur.

En procédant de la même façon, on peut démontrer que la médiane issue du sommet *C* coupe *AE* en un point situé aux deux tiers de *AE* et conclure que les trois médianes se rencontrent en un même point.

Preuve visuelle

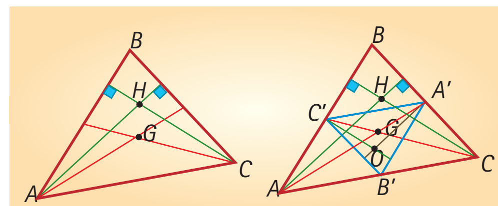
Il existe une « preuve visuelle » de cette propriété. On joint les milieux des côtés du triangle *ABC* pour former le triangle *DEF*. Puis, on divise les côtés de *ABC* en trois parties congruentes dont on a joint les extrémités en traçant les parallèles aux côtés de *ABC*.



Dans la troisième figure, on a tracé les segments de droite *AE*, *BD* et *CF* joignant un sommet au milieu du côté opposé, ce sont les médianes du triangle *ABC*. La similitude des triangles permet de « voir » que les médianes se rencontrent en un même point.

De plus, les triangles formés en joignant les points de division des côtés de *ABC* en trois parties congruentes permettent de « voir » que le point de rencontre est aux deux tiers de la médiane à partir du sommet et que ce point de rencontre est le même que celui des médianes du triangle *DEF*.

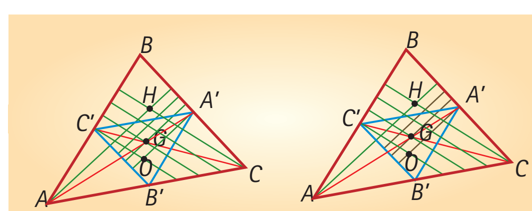
4. Dans le triangle *ABC*, on a d'abord déterminé *H*, le point de rencontre des hauteurs et *G*, celui des médianes.



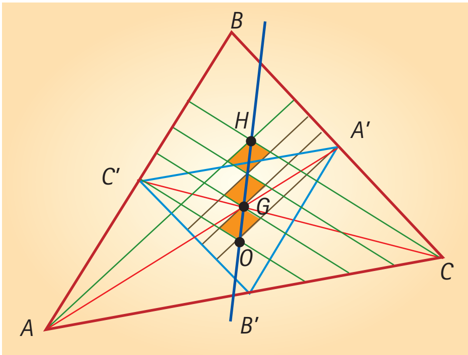
Puis, on a appliqué une homothétie de centre *G* pour reproduire la figure avec une rotation de 180° et une compression de 1/2. Le point de rencontre des hauteurs de *A'B'C'* est alors le point de rencontre des médiatrices de *ABC*. Et, on a donc que *O* est l'image de *H* par notre transformation, c'est-à-dire par l'homothétie de centre *G* de rapport 1/2 suivie d'une rotation de 180°. Donc l'image de *GH* est *GO*, et on a bien que ces points sont alignés (rotation de 180°) et que *GO* mesure la demie de *GH* (rapport d'homothétie).

Preuve visuelle

Il existe également une « preuve visuelle » de cette propriété. On divise en trois la distance entre les hauteurs de *ABC* et celles de *A'B'C'* par des parallèles à ces hauteurs.



Dans la figure suivante, la coloration des parallélogrammes formée par les parallèles aux hauteurs et aux médiatrices du triangle ABC permet de « voir » que les points sont disposés sur des sommets alignés de ces parallélogrammes.



Nombres complexes

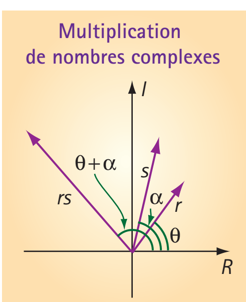
1. Soit $u = se^{i\alpha}$ et $z = re^{i\theta}$, deux nombres complexes. En multipliant le nombre u par z, on obtient :

$$zu = re^{i\theta}se^{i\alpha} = rse^{i(\theta+\alpha)}$$

Le module du vecteur représentant zu est rs. Le rapport est :

$$\frac{rs}{s} = r.$$

De plus, le vecteur représentant u a subi une rotation d'un angle θ. La multiplication par z revient à appliquer une homothétie dont le rapport est le module de z avec une rotation dont l'angle est l'argument de z.



Puisque $i = e^{i\pi/2}$, la multiplication par i est une homothétie de rapport 1 et d'angle $\pi/2$, soit une rotation de 90°. On retrouve $i^2 = -1$.

2. Par les propriétés des exposants, on a :

$$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta}.$$

Par la propriété d'Euler, on a :

$$e^{i(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$$

et $e^{i\alpha}e^{i\beta} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)$

$$= (\cos\alpha\cos\beta + i^2\sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$$

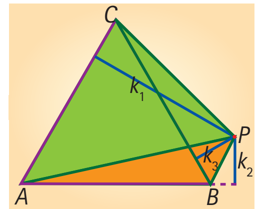
Puisque ces deux nombres complexes sont égaux et que $i^2 = -1$, on a :

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$.

Découverte à la polyvalente

1. Si le point P est à l'extérieur du triangle, comme dans la figure ci-contre, l'aire du triangle équilatéral ABC est égale à la somme des aires des triangles ACP et ABP moins celle du triangle BCP. Dans chacun de ces triangles, la base est un côté du triangle équilatéral. En désignant par c la longueur d'un côté du triangle équilatéral, on peut écrire :



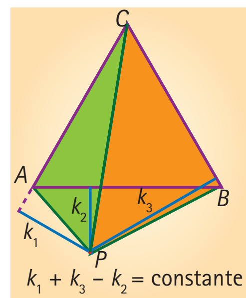
$$\begin{aligned} A_{ABC} &= A_{ACP} + A_{ABP} - A_{BCP} \\ &= \frac{ck_1}{2} + \frac{ck_2}{2} - \frac{ck_3}{2} \\ &= \frac{c}{2}(k_1 + k_2 - k_3). \end{aligned}$$

On a donc :

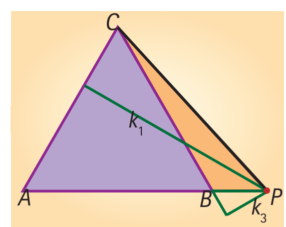
$$k_1 + k_2 - k_3 = \frac{A_{ABC}}{c/2}$$

et la valeur de $k_1 + k_2 - k_3$ est constante.

On obtient des expressions similaires en considérant que le point extérieur est compris dans l'angle formé par le prolongement de deux autres côtés.



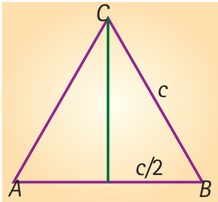
Si le point P est sur le prolongement du côté AB, comme dans la figure ci-contre, l'aire du triangle équilatéral ABC est égale à la différence des aires des triangles ACP et CBP. On obtient cette différence d'aires en posant $k_2 = 0$ dans le résultat précédent.



On a donc $k_1 - k_3 = \dfrac{A_{ABC}}{c/2}$.

et la valeur de $k_1 - k_3$ est constante. On peut poursuivre en plaçant le point dans différentes régions.

Trouvons maintenant la valeur de la constante. L'aire du triangle ABC est le demi-produit de sa base par sa hauteur. Sa base est c et, en appliquant le théorème de Pythagore, sa hauteur est :



$$h=\sqrt{c^2-\frac{c^2}{4}}=\sqrt{\frac{3c^2}{4}}=\frac{c\sqrt{3}}{2}.$$

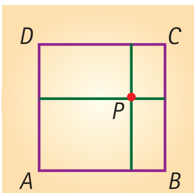
L'aire du triangle est :

$$A_{ABC}=\frac{c^2\sqrt{3}}{4}.$$

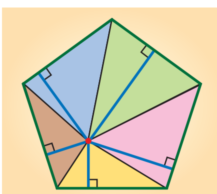
En substituant, on peut calculer la valeur de la constante et on obtient :

$$\frac{A_{ABC}}{c/2}=\frac{c^2\sqrt{3}/4}{c/2}=\frac{c\sqrt{3}}{2}.$$

2. Dans le cas d'un carré, il suffit de construire la figure ci-contre pour se convaincre que la somme des distances est $2c$, ou c est la longueur du côté du carré.



On peut montrer que cette propriété est valide pour tout polygone régulier, car la surface d'un polygone est toujours divisible en triangles dont le point P est le sommet commun.

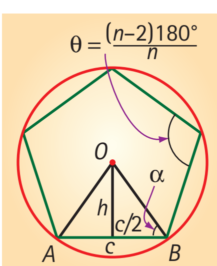


Pour calculer l'aire d'un polygone régulier de n côtés, on peut décomposer sa surface en n triangles congruents dont le sommet commun est le centre du cercle circonscrit. La mesure de l'angle en un sommet du polygone régulier inscrit est :

$$\theta=\frac{(n-2)180°}{n}.$$

La droite joignant un sommet du polygone au centre du cercle circonscrit est la bissectrice de l'angle au sommet du polygone, sa mesure est donc :

$$\alpha=\frac{\theta}{2}=\frac{(n-2)90°}{n}.$$



La hauteur h d'un des triangles congruents est alors :

$$h=\frac{c}{2}\tan\alpha$$

et l'aire du triangle est :

$$A=\frac{c}{2}\times\frac{c}{2}\tan\alpha=\frac{c^2}{4}\tan\alpha.$$

Puisqu'il y a n triangles congruents dans un polygone régulier convexe à n côtés, l'aire du polygone est :

$$nA=\frac{nc^2}{4}\tan\alpha.$$

La somme des distances d'un point intérieur d'un polygone régulier convexe à n côtés aux côtés de ce polygone est alors :

$$\sum_{i=1}^{n}k_i=\frac{2}{c}\times\frac{nc^2}{4}\tan\alpha$$
$$=\frac{nc}{2}\tan\left(\frac{(n-2)90°}{n}\right).$$

En appliquant ce résultat au triangle équilatéral, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{3}k_i=\frac{3c}{2}\tan\left(\frac{90°}{3}\right)=\frac{3c}{2}\tan(30°)$$
$$=\frac{3c}{2}\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{c\sqrt{3}}{2}.$$

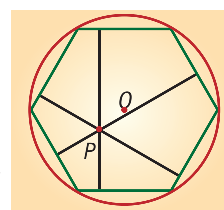
En appliquant le résultat au carré, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{4}k_i=\frac{4c}{2}\tan\left(\frac{2\times 90°}{4}\right)=2c\tan(45°)$$
$$=2c\times 1=2c.$$

En appliquant le résultat à l'hexagone régulier, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{6}k_i=\frac{6c}{2}\tan\left(\frac{4\times 90°}{6}\right)$$
$$=3c\tan(60°)=3c\sqrt{3}.$$

On remarque que, dans le cas d'un polygone convexe régulier ayant un nombre pair de côtés, la constante est la somme des distances entre les côtés parallèles du polygone.



Exercices de Yannick

1. Par comparaison des ordonnées, on peut écrire :

$$ax + b = cx + d$$

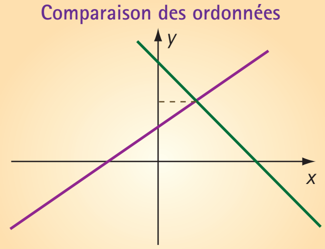
qui donne $(a - c)x = d - b$ et :

$$x=\frac{d-b}{a-c}.$$

En substituant cette valeur de x dans la première équation, on obtient :

$$y=a\left(\frac{d-b}{a-c}\right)+b=\frac{ad-bc}{a-c}.$$

Comparaison des ordonnées



La comparaison des ordonnées consiste à trouver la valeur de x donnant la même valeur de y dans les deux équations.

2. En substituant l'équation du premier degré $y = ax + b$ dans l'équation du cercle, on obtient :

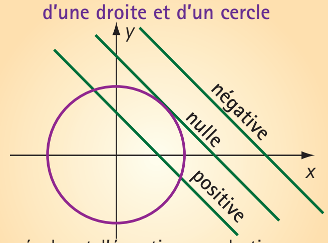
$$x^2 + (ax + b)^2 = r^2$$
$$x^2 + a^2x^2 + 2abx + b^2 = r^2$$
$$(1 + a^2)x^2 + 2abx + (b^2 - r^2) = 0.$$

On a donc une équation quadratique dont la solution est :

$$x = \frac{-2ab \pm \sqrt{4a^2b^2 - 4(1+a^2)(b^2 - r^2)}}{2(1+a^2)}$$
$$= \frac{-2ab \pm 2\sqrt{a^2r^2 - b^2 + r^2}}{2(1+a^2)}$$
$$= \frac{-ab \pm \sqrt{a^2r^2 - b^2 + r^2}}{1+a^2}.$$

En substituant cette valeur dans la première équation, on trouve la valeur de y correspondante.

Intersection d'une droite et d'un cercle



En résolvant l'équation quadratique, on rencontre différents cas selon que l'expression sous radical est positive, nulle ou négative .

3. Pour trouver les points d'intersection des deux cercles :

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad (x - h)^2 + (y - k)^2 = s^2,$$

on développe la deuxième équation pour obtenir :

$$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = s^2.$$

Puisque $x^2 + y^2 = r^2$, par substitution, on obtient :

$$-2hx + h^2 - 2ky + k^2 = s^2 - r^2.$$

En isolant y, on une relation du premier degré de la forme $y = ax + b$. Pour compléter la solution, on procède comme dans le numéro 2, en substituant l'équation du premier degré dans l'équation du cercle. Cela donne une équation du second degré que l'on sait résoudre.

4. Considérant d'abord $3\theta = 2\theta + \theta$, on a :
$\cos 3\theta = \cos 2\theta \cos \theta - \sin 2\theta \sin \theta$.

Développons maintenant en considérant que $2\theta = \theta + \theta$. Cela donne :
$= (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta$
$= \cos^3\theta - \sin^2\theta\cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta$
$= \cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta$
$= \cos^3\theta - 3(1 - \cos^2\theta)\cos\theta$
$= \cos^3\theta - 3\cos\theta + 3\cos^3\theta$
$= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta.$

On obtient donc :

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta.$$

En ayant plutôt recours aux nombres complexes, on a :

$$e^{i3\theta} = (e^{i\theta})^3$$

$e^{i3\theta} = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$
$(e^{i\theta})^3 = (\cos\theta + i\sin\theta)^3$
$\quad = \cos^3\theta + 3i^2\cos\theta\sin^2\theta$
$\quad\quad + 3i\cos^2\theta\sin\theta + i\sin^3\theta.$

Par l'égalité des nombres complexes, on a :
$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$
$\quad = \cos^3\theta - 3(1 - \cos^2\theta)\cos\theta$
$\quad = \cos^3\theta - 3\cos\theta + 3\cos^3\theta$
$\quad = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta.$