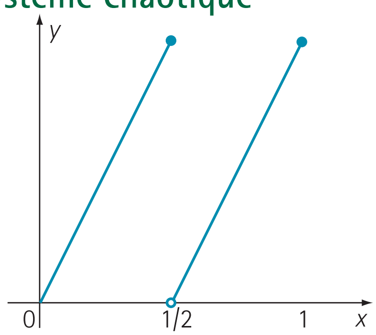
Hiver printemps 2011
Solutions

Effet de serre

1. On procède de la même manière que dans le cas du modèle d'une planète avec une seule couche de GES. On commence en calculant l'équilibre énergétique à l'interface entre l'espace et la couche de GES $(1-a)E_s = H$. Étant donné que seule la fraction $(1-a)$ de la chaleur du Soleil est absorbée à la surface de la Terre, l'équation (7) est remplacée par
$$(1-a)E_s + H = E_p.$$
En substituant notre première équation dans la deuxième et en utilisant la loi de Stefan-Boltzmann pour E_s et E_p on démontre la formule recherchée.
2. Un calcul simple montre que la température de la Terre avec une couche de GES serait de 297 K, c'est-à-dire d'environ 24 °C.

Système chaotique

a)



b) Si $x = (0{,}a_1a_2a_3\ldots)_2$, , alors $2x = (a_1{,}a_2a_3\ldots)_2$.
Si $a_1 = 0$, on a fini.
Si $a_1 = 1$, alors $f(x) = 2x - 1 = (0{,}a_2a_3\ldots)_2$.

c) Par définition,
$$\begin{aligned}(0{,}111\ldots)_1 &= \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2^i}\\ &= 1\end{aligned}$$
en utilisant que $\sum_{i=0}^{\infty} r^i = \frac{1}{1-r}$ si $r \in\,]-1,1[$.

De même, $(0{,}011\ldots)_2 = \frac{1}{2}(0{,}11\ldots)_2 = \frac{1}{2}$, etc.

d) On note un développement infini périodique en base 2 comme suit $\left(0{,}\overline{a_1a_2\ldots a_n}\right)_2$. Ainsi, $(0{,}11\ldots)_2 = \left(0{,}\overline{1}\right)_2$. Prenons, par exemple x_0 dont le développement en base 2 est de la forme $x_0 = \left(0{,}\overline{\underbrace{0\ldots0}_{n-1}1}\right)$. Alors $\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{n}(x_0) = x_0$ et $\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{k}(x_0) \neq x_0$ si $1 \le k \le n-1$.

Donc, $\{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$ est une orbite de période n.

e) Soit $x = (0{,}a_1a_2\ldots)_2$ et $y = (0{,}b_1b_2\ldots)_2$, tels que $a_i = b_i$ pour $i \le n$. Alors, $x - y = \sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{a_i - b_i}{2^i}$

et
$$\begin{aligned}|x-y| &\le \sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{|a_i-b_i|}{2^i}\\ &\le \sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\\ &= \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2^i}\\ &= \frac{1}{2^{n+1}}2 = \frac{1}{2^n},\end{aligned}$$

en remarquant que $a_i - b_i \in \{-1, 0, 1\}$

f) On énumère toutes les suites finies de 0 et de 1, soit 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111, etc. et on forme x_0 en les mettant bout à bout. Soit $y = (0,b_1b_2...)_2 \in [0, 1]$. Pour que x_m vérifie $|x_m - y_0| \leq 1/2^n$, il faut que $x_m = (0,b_1b_2...b_n...)_2$. Par construction de x_0, on sait que la suite $b_1b_2...b_n$ apparaît dans le développement en base 2 de x_0. Supposons que cela corresponde aux chiffres $a_m a_{m+1}...a_{m+n-1}$ du développement. Alors,

$$\begin{aligned} x_m &= (0,a_m a_{m+1}...a_{m+n-1}...)_2 \\ &= (0,b_1b_2...b_n...)_2. \end{aligned}$$

g) Prenons $x_0 = (0,a_1a_2...)_2$ et $y_0 = (0,b_1b_2...)_2$ très proches. Par exemple, si $|x_0 - y_0| \leq 1/2^n$, alors on sait que $a_i = b_i$ pour $i \leq n$. Mais on ne sait rien de a_i et b_i pour $i > n$. Ceux-ci peuvent être absolument quelconques. Regardons maintenant $x_m = y_m$ pour $m > n$: $x_m = (0,a_m a_{m+1}...)_2$ et $y_m = (0,b_m b_{m+1}...)_2$ n'ont donc plus rien en commun!