$\sqrt{7}=\ldots$ sans calculatrice

La calculatrice n'est pas magique : ce qu'elle calcule, elle le fait en additionnant, soustrayant, multipliant et divisant. Comment calcule-t-elle une racine carrée? Un peu comme nous, si on y pense bien...

Frédéric Gourdeau
Université Laval

Yannick et Annick, deux amis de longue date, parlent de leurs dernières lectures.

Yannick :
Je viens de lire une nouvelle d'Isaac Asimov. Il invente un monde dans lequel les humains ne savent plus multiplier ou diviser, et encore moins extraire des racines carrées : tout est fait par des machines depuis si longtemps que personne ne se souvient qu'il en a déjà été autrement. Un modeste travailleur redécouvre comment multiplier...

Annick :
Nous on ne saurait pas, sans calculatrice, calculer la racine carrée de 7? Ou la racine onzième de 1382? Ou encore le logarithme de 10 en base 3?

Yannick :
Pourtant, avant, les gens savaient comment faire. Ça m'intrigue de savoir comment ils faisaient.

Quelques jours plus tard ...

Yannick :
Tu vois Annick, pour calculer la racine carrée de 7, je constate qu'elle est entre 2 et 3.

Annick :
Évidemment! 2 au carré est plus petit que 7, alors que 3 au carré est plus grand que 7. La racine est donc entre les deux. La racine carrée est donc 2 virgule quelque chose.

Yannick :
On peut recommencer pour trouver le deuxième chiffre. On essaie 2,1 au carré, 2,2 au carré, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on trouve que 2,6 au carré donne 6,76 et que 2,7 au carré donne 7,29. La racine carrée est donc entre 2,6 et 2,7, et est donc 2,6... Et on poursuit, trouvant un chiffre à la fois.

Annick :
C'est un peu long, tu ne trouves pas?

Yannick :
Oui, mais je peux trouver autant de décimales que je veux. Je peux donc battre ma calculatrice qui ne me donne que 8 chiffres. Je peux en trouver d'autres, ce qui avoue-le est assez impressionnant.

Annick :
C'est impressionnant, mais quand même un peu long.

Yannick :
En pratique, je peux aller plus vite. Puisque 7 est plus proche de $9 = 3^2$ que de $4 = 2^2$, le nombre que je cherche est plus proche de 3 que de 2. Je peux donc essayer directement $2{,}6^2 = 6{,}76$ et $2{,}7^2 = 7{,}29$. En comparant les résultats, je vois que la racine doit être à peu près au milieu entre 2,6 et 2,7. J'essaie donc $2{,}65^2 = 7{,}0225$. C'est un peu trop grand. J'essaie $2{,}64^2 = 6{,}9696$. Tu vois on se rapproche quand même assez vite.

Annick :
C'est vrai! Mais, pourrais-tu décrire ta démarche de façon générale? Donner une procédure qu'on pourrait appliquer sans se demander chaque fois « qu'est-ce que je dois faire maintenant? » J'ai l'impression que ce serait plus simple.

Yannick reste préoccupé par la question d'Annick. Le temps fait son œuvre...

Yannick :
Eureka!

Annick :
Eureka! Tu as trouvé quoi?

Yannick :
Une façon plus générale de traiter le problème.

Annick :
Explique-moi ça.

Yannick :
J'ai remarqué que si n est la racine carrée de 7, alors on doit avoir $n \times n = 7$. Par conséquent, je peux écrire $n = 7/n$.

Annick :
Et puis après... à quoi ça sert si tu n'as pas la racine?

Yannick :
Ça me permet d'écrire $2 \times 7/2 = 7$.

Annick :
La belle affaire, 2 n'est pas égal à 7/2, ce qui serait le cas si tu avais trouvé une racine.

Yannick :
Je me suis fait la même remarque. J'ai même pris la peine de construire un rectangle dont la hauteur est 2 et la base est 7/2. C'est là que j'ai eu l'intuition qui m'a permis de trouver la méthode.

Annick :
Je ne comprends pas! On voit très bien que ta figure n'est pas un carré.

Yannick :
Je me suis rappelé que la moyenne de deux nombres est un nombre compris entre les deux. J'ai donc pensé qu'en calculant cette moyenne et en l'utilisant comme hauteur, mon rectangle serait plus proche d'un carré. Puisque la moyenne de deux nombres a et b est $\frac{a+b}{2}$, je trouve $\frac{2+7/2}{2} = \frac{11}{4}$.

Annick :
Et alors?

Yannick :
En refaisant mon dessin, j'ai constaté que je m'approchais de la vraie valeur. La hauteur de mon rectangle était maintenant $11/4 = 2{,}75$ et sa base était $28/11 = 2{,}5454...$ J'ai alors pensé refaire la même chose et j'ai trouvé 233/88 comme moyenne. En prenant cette valeur comme hauteur ma base est $\frac{7}{233/88}$.

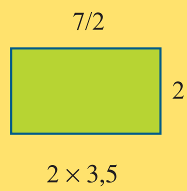
Je calcule encore la moyenne et je trouve $\frac{108\,497}{41\,008}$.

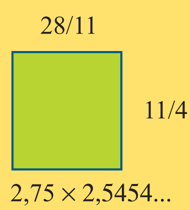
En vérifiant avec ma calculatrice, je constate que cela donne 2,645752... alors que la racine carrée de 7 est 2,645751...

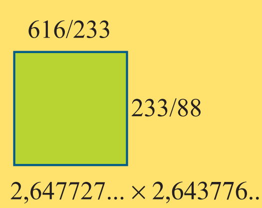
Annick :
Wow! Maintenant je suis impressionnée, tu as eu les cinq premières décimales avec seulement trois calculs.

Yannick :
Et si je calcule une autre moyenne, j'ai les 10 premières décimales correctes, ce que ma calculatrice ne peut me donner.

Annick :
Vraiment impressionnant! Félicitations.







Annick :
Essayons d'aller plus loin. Est-ce qu'on pourrait calculer n'importe quelle racine, $\sqrt[5]{70}$, par exemple.

Yannick :
Si je prends 2 comme première approximation de $\sqrt[5]{70}$, je peux écrire :

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times \frac{70}{2^4} = 70$$

Donc, la vraie valeur de $\sqrt[5]{70}$ est entre 2 et $\frac{70}{2^4}$ car, comme 2 est trop petit, $\frac{70}{2^4}$ doit être trop grand pour compenser.

Maintenant, si je fais la moyenne entre 2 et 70/16, ça me donne une meilleure valeur, mais ce n'est pas assez proche, j'obtiens une trop grande valeur. Pourquoi ?

Annick :
Tu as quatre fois le nombre 2 dans le produit $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times \frac{70}{2^4}$. Le nombre $\frac{70}{2^4}$ doit être **beaucoup** trop grand. Il faut que tu ajustes ta moyenne.

Yannick :
Bonne idée! Si je prends une moyenne pondérée, soit la moyenne de quatre fois le nombre 2 et une fois le nombre $\frac{70}{2^4}$, j'obtiens $\frac{4}{5} \times 2 + \frac{1}{5} \times \frac{70}{2^4}$, ce qui donne 99/40 = 2,475.

Annick :
Appliquons la méthode deux fois de plus pour voir.

Yannick :
En appliquant la méthode deux fois de plus, j'obtiens 2,33911.

Annick :
Vérifions avec la calculatrice... Fameux! La calculatrice donne 2,33894... Le résultat est précis au millième près.

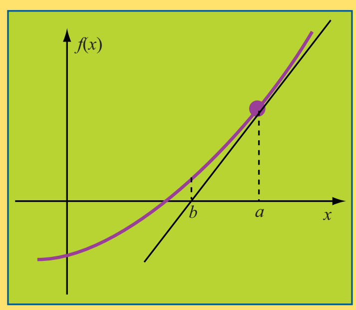
Yannick :
On peut donc calculer toutes les racines!

Une méthode par récurrence, ou Newton à la rescousse

On peut reformuler la méthode de Yannick ainsi : soit a_0 une approximation de la racine carrée de N. Alors, la suite définie par :

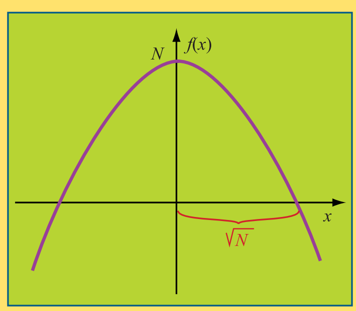
$$a_n = \frac{1}{2} a_{n-1} + \frac{1}{2} \frac{N}{a_{n-1}}$$

converge vers la racine carrée de N. Cette formule est connue depuis fort longtemps. On peut la retrouver à partir de la méthode de Newton, qui est utilisée pour trouver les zéros de certaines fonctions et qui fonctionne ainsi :



Soit $f(x)$ une fonction et a une approximation de l'un de ses zéros. Alors, on voit sur la première figure ci-contre qu'une meilleure approximation est donnée par b. Sur la figure, on voit que $f(a)/(b - a)$ est la valeur de la pente de la tangente à la courbe au point d'abscisse a, ce qui est donné par la dérivée $f'(a)$.

Pour extraire la racine carrée de N en utilisant cette méthode, on prend $f(x) = N - x^2$ puisque trouver une racine de $f(x)$ revient alors à trouver la racine carrée de N. La courbe de la fonction $f(x) = N - x^2$ est représentée ci-contre.



Et les logarithmes!

En poursuivant leurs recherches, les deux amis ont réussi à déterminer une méthode pour calculer le logarithme d'un nombre. Ils ont constaté qu'en écrivant :

$$\sqrt{3} = 1{,}73205808...,$$

ils écrivent en fait que :

$$\log_3 1{,}73205808 = 1/2$$

Alors, en faisant un tableau avec les racines successives de 3, ils peuvent calculer les logarithmes en base 3!

Peut-être saurez-vous retrouver leur méthode?

Et les calculatrices

La méthode itérative trouvée par Yannick pour le calcul de la racine carrée est proche de ce qui est fait par les calculatrices. Cependant, la calculatrice doit pouvoir trouver une bonne valeur initiale pour amorcer la méthode itérative. Pour faire cela efficacement, l'algorithme de calcul utilisé ramène le calcul d'une racine carrée d'un nombre quelconque à celui de la racine carrée d'un nombre compris dans un petit intervalle : montrons comment faire pour l'intervalle [1/4, 1].

Pour $\sqrt{7}$, puisque $2^2 < 7 < 2^4$, on a :

$$\sqrt{7} = \sqrt{2^4} \times \sqrt{\frac{7}{2^4}} = 2^2 \times \sqrt{\frac{7}{16}},$$

et il suffit donc de pouvoir bien calculer la racine carrée de 7/16 (qui est bien un nombre entre 1/4 et 1).

Ici, une bonne valeur initiale est donnée par :

$a + b \times 7/16$, où $a = 0{,}42578$ et $b = 0{,}57422$.

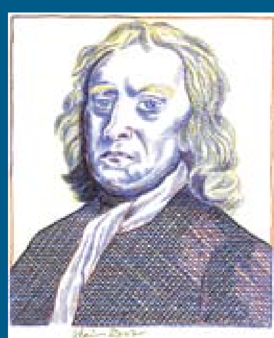
Cette formule donne de bons résultats pour tous les nombres entre 1/4 et 1 (en remplaçant 7/16 par le nombre en question). Essayez en itérant 4 fois... et vous serez plus précis que bien des calculatrices !

Un truc approximatif?

Les calculs de Yannick ne donnent pas la réponse exacte, puisqu'on n'a pas obtenu la racine voulue exactement. Cependant, la racine d'un nombre peut avoir un développement décimal illimité et la valeur exacte est donc souvent inatteignable.

En revanche, on peut l'obtenir aussi précisément que l'on veut. C'est déjà mieux que la calculatrice, qui ne donne souvent qu'une approximation à huit décimales.

De plus, on peut utiliser la méthode de Yannick pour **améliorer** le résultat de la calculatrice : en effet, si r est une approximation de la racine carrée de N, alors la moyenne de r et N/r est une meilleure approximation.



Isaac Newton

1643-1727

Isaac Newton est né à Whoolsthorpe près de Grantham dans le Lincolnshire. Orphelin de père dès sa naissance, il fut élevé par sa grand-mère, sa mère s'étant remariée avec un fermier d'un village voisin où elle s'installa. À la mort de son beau-père, en 1656, sa mère le retira de l'école pour aider à la ferme. Un de ses oncles insista alors pour qu'il poursuive ses études et fréquente l'université. Il entra au Trinity College de Cambridge en juin 1661.

À Cambridge, il étudia les travaux de Descartes, Gassendi et Boyle. Il étudia également l'algèbre et la géométrie analytique développées par Viète, Descartes et Wallis. Il s'intéressa à la mécanique et à l'astronomie copernicienne à partir des ouvrages de Galilée. Durant l'épidémie de peste de 1665, l'université ferma ses portes et Newton retourna dans le Lincolnshire. Pendant les deux années qui suivirent, alors qu'il n'avait pas encore vingt-cinq ans, il entreprit des recherches avancées en mathématiques, en optique, en physique et en astronomie. Pendant ce séjour, il posa les fondements du calcul différentiel et intégral.