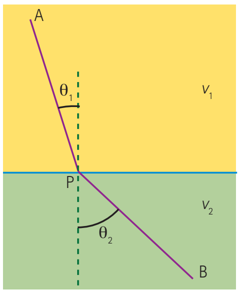
Section problèmes



Noyau de la Terre

La figure ci-contre illustre le changement de direction d'un rayon lumineux traversant deux milieux différents.[1] La vitesse de la lumière dans ces milieux est représentée respectivement par v_1 et v_2. Montrer que le rayon lumineux emprunte le chemin le plus rapide pour aller du point A au point B.

Quand la circonférence prend une bouffée d'aire

1. La deuxième proposition du traité *De la mesure du cercle* d'Archimède se lit comme suit : *Le rapport du cercle au carré de son diamètre est celui de 11 à 14*. (Il faut ici entendre qu'on s'intéresse à l'aire du cercle.)

   Montrer comment ce résultat peut être établi à partir de la proposition 1 du même traité et de l'approximation $22d/7$ pour la circonférence du cercle établie par Archimède à la proposition 3.

2. Soit un rectangle de côtés a et b. Montrer comment, en utilisant seulement le compas et la règle (non graduée), il est possible de « quarrer » le rectangle, c'est-à-dire de construire un carré de même aire.

   (*Tuyau* : Il s'agit donc de construire, règle et compas, le côté de ce carré, c'est-à-dire un segment de longueur $\sqrt{ab}$.)

3. On revient ici sur une étape de l'argument d'Archimède, quand vient le temps de montrer que l'aire du cercle ne peut être inférieure à celle du triangle rectangle en cause. Il est alors question d'augmenter le nombre de côtés des polygones réguliers circonscrits au cercle donné « jusqu'à ce que l'on trouve un certain polygone régulier circonscrit dont l'aire surpasse celle du cercle d'une quantité moindre que la différence $A_T - A$ » (voir p. 34). Mais est-on certain que ce phénomène va toujours se produire? Autrement dit, *les polygones circonscrits se rapprochent-ils « autant que l'on veut » du cercle?* Ce problème vise à montrer que oui. On utilise pour cela un principe de raisonnement déjà évoqué dans le texte (voir la section *Une méthode épuisante... mais efficace*), à savoir la proposition X.1 des *Éléments* d'Euclide (voir p. 34).

   Dans le cas qui nous intéresse, il s'agit donc de montrer que lorsque l'on double le nombre de côtés d'un certain polygone régulier circonscrit, l'excès de son aire sur le cercle se trouve ainsi diminué de plus de la moitié. Nous proposons de vérifier ce fait dans le passage du carré à l'octogone régulier.

   À cet effet, nous partons du carré circonscrit (figure 1 à gauche) et considérons l'excédent du carré sur le cercle. Comme la figure est symétrique, nous nous concentrons sur une partie seulement de celle-ci, à savoir le coin supérieur gauche. On s'intéresse donc à l'aire de la région HEAF, délimitée par les segments HE et HF ainsi que par l'arc de cercle EAF, où E et F sont les points où les côtés du carré sont tangents au cercle.

   Le passage à l'octogone régulier circonscrit (figure 2) fait intervenir le côté IJ de cet octogone, tangent au cercle en A (voir zoom à la figure 3). Montrer qu'en retranchant le triangle HIJ, on supprime plus de la moitié de l'aire de la région HEAF.

   (*Tuyau* : Le problème revient ultimement à comparer les triangles HAJ et AJF. Or observons que le premier est un triangle rectangle, tandis que l'autre est isocèle — examiner à cet égard le quadrilatère OAJF.)

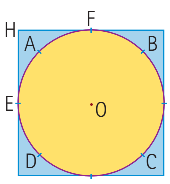


Figure 1

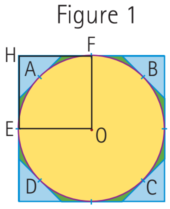


Figure 2

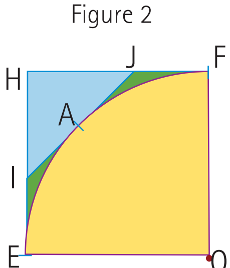


Figure 3

1. *Le phénomène de la réflexion semble avoir été connu dès l'Antiquité, comme le révèle l'anecdote des miroirs ardents d'Archimède. (Voir à ce sujet le texte de Christiane Rousseau et Yvan Saint-Aubin dans* Accromath *vol. 2, hiver-printemps 2007, p. 2-5.) En 984, dans un ouvrage sur les miroirs et les lentilles, le mathématicien arabe ibn Sahl (940-1000) présente le résultat de ses travaux sur la réfraction. En Europe, ce phénomène a été étudié pour la première fois par Willebrord Snell (1580-1626), puis par René Descartes (1596-1650). On associe le nom de ces deux hommes à la loi de la réfraction. Cependant, c'est Pierre de Fermat (1601-1665) qui, en développant le principe de « moindre temps », est le premier à donner un fondement rigoureux à cette loi. Le principe de moindre temps a été depuis reformulé et développé pour devenir le « principe de moindre action ».*