Section problèmes

Mathématiques au théâtre

À la question du professeur de *La leçon* « combien font, par exemple, trois milliards sept cent cinquante-cinq millions neuf cent quatre-vingt-dix-huit mille deux cent cinquante et un, multiplié par cinq milliards cent soixante-deux millions trois cent trois mille cinq cent huit ? », Ionesco fait répondre par l'élève (très vite !) : « Ça fait dix-neuf quintillions trois cent quatre-vingt-dix quadrillions deux trillions huit cent quarante-quatre milliards deux cent dix-neuf millions cent soixante-quatre mille cinq cent huit ... » Le professeur étonné réplique alors : « Non. Je ne pense pas. Ça doit faire dix-neuf quintillions trois cent quatre-vingt-dix quadrillions deux trillions huit cent quarante-quatre milliards deux cent dix-neuf millions cent soixante-quatre mille cinq cent neuf... »

Qui a sûrement tort ? Se pourrait-il que les deux se trompent ?

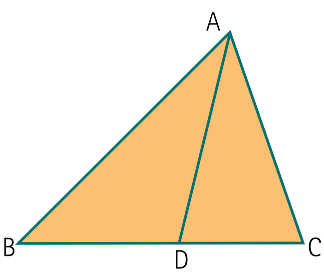
(*Conseil* : Comme la valeur exacte du résultat dépasse les possibilités de représentation des nombres dans votre calculatrice, cherchez une façon créative d'utiliser cet outil pour arriver à la bonne réponse sans faire tous les calculs à la main.)

La quête du fameux 22/7

1. a) Étant donné un triangle équilatéral DEF, abaissons la hauteur EG (avec G sur DF), formant ainsi un triangle rectangle DEG d'hypoténuse DE. Déterminer les rapports des longueurs des côtés du triangle DEG.

   b) Soit un triangle ABC et soit AD, la bissectrice de l'angle A (avec D sur BC). Montrer que les segments BD et DC sont dans le même rapport que les deux côtés AB et AC du triangle. (Euclide, *Éléments*, VI.3)

   (*Tuyau* : Menez une parallèle à la bissectrice par un point astucieusement choisi et faites intervenir Thalès.)



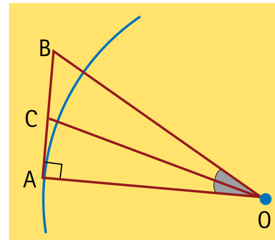
2. Cet exercice vise à expliciter deux étapes du raisonnement dans l'encadré *Le cœur de l'argument d'Archimède*. Soit donc le triangle BOA rectangle en A et tel que l'angle BOA vaut 30°. Soit de plus OC, bissectrice de cet angle.

a) Montrer que

$$\frac{m(\overline{AO})+m(\overline{BO})}{m(\overline{AO})}=\frac{m(\overline{AB})}{m(\overline{AC})}.$$

En déduire une borne inférieure pour le rapport

$$\frac{m(\overline{AO})}{m(\overline{AC})}.$$



b) Se concentrant maintenant sur le triangle rectangle COA, donner une borne inférieure pour le rapport[1]

$$\frac{m(\overline{AO})^2+m(\overline{AC})^2}{m(\overline{AC})^2}.$$

3. Dans le cinquième livre de *La Collection mathématique*, le mathématicien grec Pappus d'Alexandrie (4e siècle) se penche sur le lien entre la circonférence d'un cercle et son diamètre et démontre, à la proposition 11, le résultat suivant :

Les circonférences de cercles sont entre elles comme les diamètres.

La démonstration proposée par Pappus repose sur deux résultats préliminaires : le fait que les aires de cercles sont entre elles comme les carrés des diamètres (Euclide, *Éléments*, XII.2) et la proposition 1 du traité *De la mesure du cercle*, où Archimède établit que l'aire d'un cercle est celle d'un triangle rectangle ayant pour cathètes le rayon et la circonférence du cercle.

Montrer comment obtenir la proposition V.11 de Pappus à partir de ces deux résultats d'Euclide et d'Archimède.

1. *Archimède s'appuie sur ce rapport pour borner inférieurement le rapport*

$$\frac{m(\overline{CO})}{m(\overline{AC})}.$$