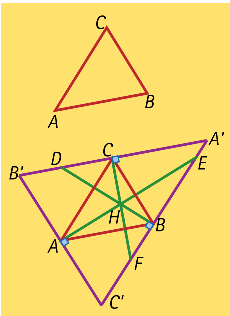
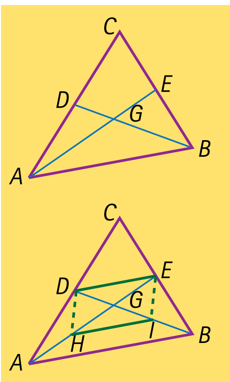
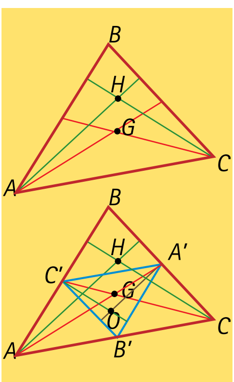
Section problèmes







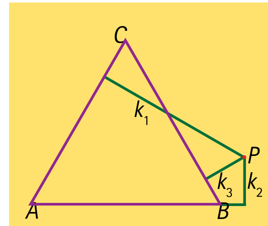
Droite d'Euler

1. Montrer que les médiatrices d'un triangle se rencontrent en un même point.
2. La première figure ci-contre présente une construction à partir d'un triangle *ABC*. Expliquer pourquoi cette construction permet de conclure que les hauteurs du triangle *ABC* se rencontrent en un même point.
3. Analyser les étapes de construction du deuxième groupe de figures ci-contre et expliquer pourquoi cette construction permet de conclure que les médianes du triangle *ABC* se rencontrent en un même point aux deux tiers de leur longueur à partir du sommet et que ce point de rencontre est le même pour les médianes du triangle *DEF*.
4. Analyser les étapes de construction du troisième groupe de figures ci-contre, et expliquer pourquoi cette construction permet de conclure que les points de rencontre des hauteurs, des médiatrices et des médianes sont sur une même droite.

Nombres complexes (collégial)

1. Montrer que la multiplication par un nombre complexe z revient à appliquer une homothétie dont le rapport est le module de z avec une rotation dont l'angle est l'argument de z. En déduire que la multiplication par i donne une rotation de 90°.
2. Utiliser l'expression $z = e^{i\theta}$ pour retrouver les formules de $\cos(\alpha + \beta)$ et $\sin(\alpha + \beta)$ qui sont utilisées au numéro 4 des exercices de Yannick. Suggestion $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta}$.

Découverte à la polyvalente



1. Considérant un triangle équilatéral *ABC* et un point *P* à l'extérieur du triangle et à l'intérieur de l'angle formé par le prolongement des côtés *AB* et *AC*, montrer que :

   $$k_1 + k_2 - k_3 \text{ est constant.}$$

   Déterminer la valeur de la constante. Ce résultat est-il toujours valide si le point *P* traverse un côté mais reste à l'intérieur de l'angle formé par les deux autres côtés?
2. Peut-on montrer que la somme des distances d'un point intérieur *P* aux côtés d'un polygone régulier convexe à *n* côtés est constante? Quelle est alors la valeur de cette constante?

Exercices de Yannick

Pour démontrer l'impossibilité de la trisection de l'angle, Alexandra a donné les exercices suivants à Yannick.

1. Procéder par comparaison des ordonnées pour trouver le point d'intersection des droites :

   $$y = ax + b,\ y = cx + d, \text{ où } a \neq c.$$

2. Expliquer la démarche pour trouver les deux points d'intersection du cercle et de la droite :

   $$y = ax + b,\quad x^2 + y^2 = r^2,$$

   où a, b et r sont des constantes.
3. Expliquer la démarche pour trouver les points d'intersection des cercles :

   $$x^2 + y^2 = r^2 \text{ et } (x - h)^2 + (y - k)^2 = s^2.$$

(collégial)

Voir aussi le numéro 2 sur les nombres complexes.

4. En utilisant les identités :

   $$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

   $$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

   $$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$

   montrer que :

   $$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta.$$

   Donner une autre preuve de cette propriété, cette fois en utilisant les nombres complexes.