Le réveil

Rubrique des Paradoxes

Jean-Paul Delahaye
Université des Sciences
et Technologies de Lille

Vous êtes le sujet d'une expérience dont le but est de tester vos capacités de raisonnement. Voici le protocole de l'expérience. Le dimanche soir, on vous endort et on lance une pièce de monnaie non truquée que vous avez pu examiner.

Si la pièce tombe sur FACE, le lendemain (lundi) on vous réveille et l'on a un entretien avec vous.

Si c'est PILE, le lundi on vous réveille, on a un entretien avec vous, puis on vous rendort, on vous soumet à un traitement qui provoque une amnésie totale de la journée du lundi, et enfin le mardi on vous réveille à nouveau et l'on a un entretien avec vous (vous ignorez donc que ce second entretien se déroule le mardi). Lors des entretiens, on vous demande :
— quelles probabilités attribuez-vous à FACE et à PILE ? Deux raisonnements semblent possibles. Premier raisonnement : « Je suis certain que la pièce est normale et d'ailleurs je m'en suis assuré. Quand je suis réveillé, je n'ai aucune information en plus de celles dont je disposais le dimanche soir avant de m'endormir. Avant de m'endormir, la probabilité est 1/2 pour chaque éventualité FACE ou PILE. Donc, quand je suis réveillé lors de l'expérience, je dois attribuer la probabilité 1/2 à chaque éventualité. Je réponds donc que la probabilité pour que la pièce soit tombée sur FACE est 1/2, et c'est aussi 1/2 pour PILE. »

Deuxième raisonnement : « Imaginons qu'on fasse l'expérience 100 fois en opérant 100 semaines de suite. Dans environ la moitié des semaines (50), je serai réveillé le lundi après un tirage FACE. Les autres semaines (50 environ), PILE aura été tiré et je serai réveillé le lundi et le mardi (il y aura donc 100 réveils environ). Au total lors des 100 semaines, je serai réveillé environ 150 fois et, sur ces 150 réveils, FACE sera la bonne réponse 50 fois, et PILE sera la bonne réponse 100 fois. À chaque fois que je suis réveillé, la probabilité que la pièce lancée le dimanche soit tombée sur FACE est donc de 1/3, et pour PILE c'est 2/3. Ma réponse est donc : 1/3 pour FACE, et 2/3 pour PILE. »

Deux raisonnements parfaitement rigoureux conduisent à deux résultats différents. C'est absurde ! Quel est le bon raisonnement et quelle est précisément l'erreur dans le raisonnement faux ?

Solution du paradoxe précédent

La cravate la plus longue

La solution

Monsieur A. propose à Monsieur B. le marché suivant : ils vont comparer les longueurs de leurs cravates et celui qui aura la plus longue cravate la donnera à l'autre qui se retrouvera donc avec deux cravates. Monsieur B. raisonne ainsi : « Ma cravate a pour longueur L. Si ma cravate est la plus longue, ce qui a une chance sur deux de se produire, je la perds donc je perds une cravate de longueur L.

Sinon je gagne la cravate de Monsieur A. dont la longueur est L' avec $L' > L$. Donc : une fois sur deux je perds L et une fois sur deux je gagne plus que L. En moyenne, je suis gagnant, comme si une fois sur deux je perdais un euro et qu'une fois sur deux je gagnais deux euros. J'accepte donc l'offre ».

Pourtant le jeu est parfaitement symétrique et donc A. peut raisonner de la même façon et conclure que le jeu lui est favorable. Ce n'est pas possible : un jeu ne peut pas être favorable aux deux joueurs car ce que l'un gagne, l'autre le perd. Comment sortir de cette contradiction ?

Plusieurs analyses de ce paradoxe ont été proposées dont la plus simple est la suivante : B. se trompe quand il dit qu'il y a une chance sur deux que la cravate de A. soit plus longue que la sienne.

Si, une fois le pari accepté, sa cravate était choisie au hasard ainsi que celle de A., il serait possible de dire qu'il y a une chance sur deux que la cravate de A. soit plus longue, mais au moment du pari, la longueur de la cravate de B. est déjà fixée et connue de lui, et c'est cette longueur comparée à la répartition des longueurs des cravates en circulation qui permet, selon les cas, de conclure qu'il faut accepter ou pas la proposition. Imaginons par exemple que la longueur de la cravate de B. soit 1 m et que, parmi toutes les cravates vendues, il y en ait 55 % de plus de 1 m et 45 % de moins de 1 m, alors il est clair que B. doit accepter. Le principe d'indifférence (considérer qu'en l'absence de données précises, les probabilités entre les différents cas sont égales) conduit fréquemment à des erreurs ou à des contradictions et donc il faut s'en méfier. Le paradoxe de la cravate est un de ces cas, en voici un autre, plus simple.

En choisissant une lettre de l'alphabet au hasard, quelle est la probabilité Pr de tomber sur un A ?

Réponse 1 : il y a 26 lettres, donc $Pr = 1/26$ (application du principe d'indifférence aux 26 possibilités A, B, ... Z).

Réponse 2 : il y a une chance sur 2 que la lettre soit une voyelle (application du principe d'indifférence entre les deux possibilités voyelle/consonne) et il y a une chance sur 6 pour qu'une voyelle soit un A, car il y a 6 voyelles A, E, I, O, U et Y (principe d'indifférence entre les 6 voyelles), donc en combinant les deux, cela fait une chance sur 12 : $Pr = 1/12$.

Réponse 3 : $Pr = 1/13$ car, dans les lettres d'un texte en français, il y a à peu près un A toutes les 13 lettres (principe d'indifférence appliqué aux lettres rencontrées dans des textes en français). En réalité, en l'absence de précision, il est impossible de trancher entre les diverses applications du principe d'indifférence qui conduisent à des résultats contradictoires. Comme dans le cas des cravates, trop peu d'informations sont disponibles pour qu'on puisse raisonner en termes probabilistes.