La plus belle propriété du nombre π

L'importance du nombre π n'est plus à démontrer. Pourtant la propriété suivante de π (découverte par E. P. Northrop) ne manquera pas de vous étonner.

Rubrique des **Paradoxes**

Jean-Paul Delahaye
Université des Sciences et Technologies de Lille

Toute série converge vers π.

En effet, soit une série quelconque (par prudence et si vous savez ce que c'est, vous pouvez considérer une série absolument convergente) :

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + \ldots$$

Les égalités (finies) suivantes sont immédiates :

$$\begin{aligned}
a_1 &= \pi + (a_1 - \pi)\\
a_2 &= -(a_1 - \pi) + (a_1 + a_2 - \pi)\\
a_3 &= -(a_1 + a_2 - \pi) + (a_1 + a_2 + a_3 - \pi)\\
a_4 &= -(a_1 + a_2 + a_3 - \pi) + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - \pi)\\
&\vdots
\end{aligned}$$

En ajoutant toutes ces égalités, nous obtenons une nouvelle égalité :

$$\begin{aligned}
&a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + \ldots =\\
&\pi + (a_1 - \pi) - (a_1 - \pi) + (a_1 + a_2 - \pi) - (a_1 + a_2 - \pi) +\\
&(a_1 + a_2 + a_3 - \pi) - (a_1 + a_2 + a_3 - \pi) + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - \pi) \ldots
\end{aligned}$$

Toutes les parenthèses dans le second membre de cette égalité se simplifient deux à deux et disparaissent. Donc :

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + \ldots = \pi$$

Pensez-vous que cela soit normal ?

Parmi les conséquences de notre démonstration, on remarque que si tous les a_i sont nuls à partir de a_5, on obtient :

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \pi$$

Donc, toute somme de quatre nombres vaut π.

Mieux encore, si tous les a_i sont nuls à partir de a_2, on a :

$$a_1 = \pi.$$

Par conséquent, tout nombre est égal à π.

Il doit bien y avoir quelque chose qui cloche!

Solution du paradoxe précédent

Trois pesées suffisent

Nous avons démontré que lorsque n pièces de monnaie ($n \geq 2$) d'apparence identique sont données, l'une plus légère que les autres, alors trois pesées au plus avec une balance à deux plateaux (permettant de comparer des poids sans les mesurer) suffisent pour l'identification de la pièce la plus légère.

Nous avons procédé de la façon suivante :

Lorsqu'on a deux pièces, on en place une sur le plateau de gauche et l'autre sur le plateau de droite de la balance. Puisque l'une des pièces est plus légère, l'équilibre ne se fait pas et on repère facilement la plus légère.

Nous avons ensuite posé l'hypothèse de récurrence selon laquelle il existe une procédure utilisant au plus trois pesées pour n pièces et montré qu'il est alors suffisant d'effectuer trois pesées pour $n + 1$ pièces dont l'une est plus légère que les autres qui, elles, sont toutes de poids identique. En mettant de côté l'une des pièces, on a alors un paquet de n pièces et un autre de une pièce. Dans le paquet de n pièces, on peut appliquer la procédure de l'hypothèse de récurrence pour repérer la pièce la plus légère. Si cette procédure ne donne aucune pièce plus légère, celle-ci est alors dans le paquet ne contenant qu'une pièce et, dans un cas comme dans l'autre, on a repéré la pièce la plus légère parmi $n + 1$ pièces en n'effectuant que trois pesées.

Peut-on vraiment s'imaginer qu'avec un million de pièces en trois pesées on peut repérer celle qui est la plus légère? N'est-il pas étrange que le raisonnement présenté semble s'adapter et arriver à la même conclusion avec une seule pesée au lieu de trois? Il y a donc une erreur. Laquelle ?

L'erreur vient de la confusion entre

a) procédure qui repère la pièce la plus légère lorsqu'on lui donne des pièces dont l'une est plus légère, et :

b) procédure qui indique que toutes les pièces sont de poids identique si c'est le cas, et qui indique la plus légère si l'une est plus légère.

Une procédure de pesée du premier type pour trois pièces demande une seule pesée (vous prenez deux pièces, si elles sont de même poids, c'est que la troisième est la plus légère, sinon vous savez laquelle est la plus légère). Une procédure du second type pour trois pièces demande en revanche deux pesées car, après une seule pesée, si les deux pièces essayées ont le même poids, vous ne pouvez savoir si la troisième a le même poids ou si elle est plus légère. Rechercher des procédures de type *a* n'est pas la même chose que rechercher des procédures de type *b*. Ceci étant compris, l'erreur est facile à repérer : l'énoncé mentionne des procédures de type *a*, mais le raisonnement subrepticement utilise l'hypothèse de récurrence avec une procédure de type *b*.