Trois pesées suffisent

Voici un joli raisonnement par récurrence dû à Keith Austin conduisant à une étrange conclusion.

Rubrique des **Paradoxes**

Jean-Paul Delahaye
Université des Sciences et Technologies de Lille

Nous allons démontrer que lorsque n *pièces de monnaies (*$n \geq 2$*) d'apparences identiques sont données, l'une plus légère que les autres, alors trois pesées au plus avec une balance à deux plateaux (permettant de comparer des masses sans les mesurer) suffisent pour l'identification de la pièce la plus légère..*

Lorsque $n = 2$, on procède de la manière suivante. On prend les deux pièces indiscernables, on en place une sur le plateau de gauche et une autre sur le plateau de droite de la balance. L'équilibre ne se fait pas car l'une des pièces est plus légère par hypothèse. On peut la repérer, c'est celle qui se trouve sur le plateau qui monte. Dans ce cas simple, une seule pesée a suffi.

Soit maintenant $n \geq 2$. Supposons, comme hypothèse de récurrence, que nous connaissons une procédure utilisant au plus trois pesées pour n pièces, toutes de même masse, sauf une qui est plus légère. Montrons comment obtenir une procédure pour $n + 1$ pièces.

Considérons $n + 1$ pièces de même masse, sauf une qui est plus légère que les autres. Nous mettons à part l'une des $n + 1$ pièces, et nous appliquons la procédure donnée par l'hypothèse de récurrence aux n pièces restantes.

Si la pièce la plus légère est dans les n pièces retenues, la procédure permet de la trouver. On a donc identifié la pièce la plus légère et il a suffi de trois pesées.

Si la procédure ne permet pas de trouver une pièce plus légère que les autres parmi celles retenues, c'est que la plus légère est celle que nous avons mise de côté. On trouve à nouveau la pièce la plus légère et il a encore suffi de trois pesées.

Donc, en au plus trois pesées, nous avons réussi à connaître la pièce la plus légère parmi les $n + 1$ pièces données.

Le raisonnement par récurrence fonctionne donc bien et, en conséquence, pour tout entier $n \geq 2$, il existe une procédure en trois pesées permettant d'identifier une pièce plus légère que les autres dans un ensemble de n pièces.

Croyez-vous vraiment qu'avec un million de pièces, en trois pesées vous pouvez repérer la plus légère ? N'est-il pas étrange que le raisonnement présenté semble s'adapter et arriver à la même conclusion avec une seule pesée au lieu de trois ? Il y a donc une erreur. Laquelle ?

Solution du paradoxe précédent

Vous êtes la personne la plus riche du monde

Le paradoxe précédent était basé sur les énoncés suivants :

- *La troisième phrase est vraie et vous êtes la personne la plus riche du monde.*
- *La troisième phrase n'est pas vraie.*
- *Une au moins des deux premières phrases est vraie.*

En raisonnant par l'absurde sur ces énoncés, on avait conclu que la troisième phrase est vraie, que la seconde était fausse, vous étiez donc la personne la plus riche du monde puisqu'au moins une des deux premières phrases est vraie.

Ce paradoxe est ce qu'on appelle un *paradoxe de l'autoréférence*. Dans un tel paradoxe, accepter de considérer que les phrases envisagées sont vraies ou fausses conduit inévitablement à des contradictions : il n'y a pas d'erreur de raisonnement.

Le plus simple paradoxe de l'autoréférence est le fameux paradoxe du menteur :

je suis en train de mentir

Si on considère que l'énoncé est vrai, c'est que je mens, donc l'énoncé est faux. Il y a donc une contradiction.

Si on considère que l'énoncé est faux, je mens et donc l'énoncé vrai. Il y a encore une contradiction.

On obtient toujours une contradiction selon que l'on considère l'énoncé vrai ou faux.

De nombreuses théories ont été proposées pour traiter les paradoxes de l'autoréférence. La plus simple consiste à décréter : les phrases autoréférentes ne sont pas de vraies phrases et doivent être interdites comme le sont les phrases grammaticalement incorrectes. Une telle théorie est cependant insatisfaisante puisque certaines phrases autoréférentes ne créent pas de problèmes. C'est le cas de la phrase « je suis en train d'écrire cette phrase ».

D'autres théories plus subtiles sont moins radicales, mais aucune aujourd'hui ne fait l'unanimité chez les spécialistes et les paradoxes de l'autoréférence restent donc assez mystérieux.

Notons que les paradoxes de l'autoréférence ne contaminent pas les systèmes de raisonnements utilisés en mathématiques (il serait très grave pour les mathématiciens de rencontrer des contradictions dans leurs théories), mais qu'au contraire, soigneusement adaptés, ils permettent de prouver des théorèmes intéressants : théorèmes d'incomplétude de Gödel[1], théorème de Tarski[2] sur les prédicats de vérité.

1. http://www.jutier.net/contenu/kgodel.htm
http://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_d'incomplétude_de_Gödel
2. http://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_de_Tarski