Tout nombre plus grand ou égal à 2 est pair

Le raisonnement mathématique, s'il est mené avec rigueur, ne peut conduire que de vérités en vérités. Pourtant, certains raisonnements, présentant tous les dehors d'une rigueur irréprochable, conduisent à des absurdités.

Rubrique des **Paradoxes**

Jean-Paul Delahaye
Université des Sciences et Technologies de Lille

Accromath Vol. 3 • hiver-printemps 2008

C'est un jeu parfois difficile que de découvrir ce qui cloche dans un raisonnement erroné. Nous allons voir un exemple de raisonnement conduisant à une affirmation absurde en montrant par récurrence[1] la propriété suivante :

> Si E est un ensemble fini de nombres commençant à 2, alors E ne contient que des nombres pairs.

Raisonnons sur le nombre k d'éléments de E. Précisément, montrons par récurrence que la propriété Pro(n) est vraie pour tout $n \geq 1$, où :

Pro(n) : tout ensemble de n éléments contenant 2 ne contient que des nombres pairs.

Démonstration

Si k =1, la propriété est vraie car alors E ne contient qu'un élément, 2, qui est pair et donc E ne contient que des nombres pairs.

Supposons que Pro(k) est vraie et montrons que cela entraîne que Pro(k+1) est vraie.

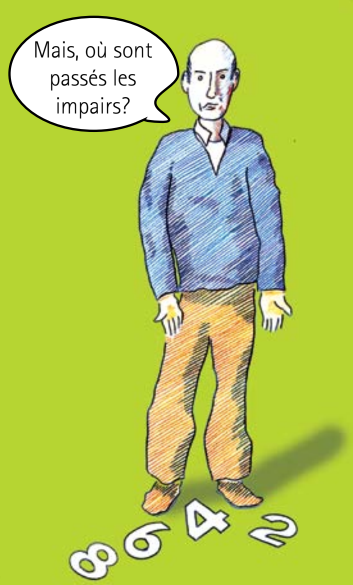
Soit un ensemble E ayant k+1 éléments et contenant 2. Soient deux parties A et B différentes l'une de l'autre, contenues dans E, chacune ayant 2 pour élément et ayant chacune k éléments. Puisque chacune contient k éléments dont 2, d'après l'hypothèse de récurrence (Pro(k) est vraie), chacune ne contient que des nombres pairs. Leur réunion, E, ne contient donc que des nombres pairs (car la réunion de deux ensembles ne contenant que des nombres pairs ne contient bien sûr que des nombres pairs). Le raisonnement par récurrence est terminé et, puisque les deux conditions sont satisfaites, on peut conclure que :

Pro(n) est vraie pour tout $n \geq 1$.

> Nous venons donc de démontrer que tout ensemble fini commençant à 2 ne contient que des nombres pairs. Autrement dit, tout ensemble de la forme $\{2, 3, ..., n\}$ ne contient que des nombres pairs.

> Par conséquent, tout nombre entier plus grand ou égal à 2 est pair.

Où est l'erreur ?



1. *Voir l'article* Preuves par récurrence *en page 26 du présent numéro.*

Solution du paradoxe précédent

Bien ranger son argent

Julie et Jacques, chaque jour, gagnent deux pièces d'or et en dépensent une. Mais, à la fin des temps, Julie sera infiniment riche et Jacques complètement ruiné. Est-ce vraiment le cas?

Intuitivement, il est illogique que les deux personnages (Jacques et Julie) qui gagnent chacun deux pièces par jour et en économisent une, possèdent à la fin des temps des sommes d'argent différentes. Rappelons que chaque jour Jacques place les deux nouvelles pièces sous sa pile et dépense celle du dessus. Il finit par dépenser chaque pièce gagnée : il n'a donc plus rien à la fin des temps. Julie, elle, dépense l'une des pièces gagnées et met l'autre de côté, et est donc infiniment riche.

Ce paradoxe illustre à quel point il est délicat de faire intervenir l'infini dans un raisonnement. Analysons la situation en utilisant la notion de *cardinal d'un ensemble* (noté card). Le cardinal d'un ensemble est le nombre d'éléments de cet ensemble. Dans le paradoxe, les éléments sont les pièces de monnaie conservées par Julie et par Jacques et le cardinal de l'ensemble des avoirs de chacun à un temps donné est le nombre de pièces non dépensées à ce moment. Notons E_n l'ensemble des pièces conservées par Julie au temps n, et E le nombre de pièces à la fin des temps. Lorsque n tend vers l'infini, le cardinal E_n tend vers l'infini, et card(E) = ∞. Julie devient infiniment riche. Si on note F_n et F les ensembles des pièces conservées par Jacques, on sait que les pièces reçues le jour n sont dépensées les jours $2n - 1$ et $2n$. Jacques finit par dépenser toutes les pièces gagnées et F est l'ensemble vide. Le cardinal de cet ensemble est card(F) = 0.

Adoptons maintenant une approche différente. Au bout de $2n$ jours, l'ensemble $E(2n)$ des pièces économisées par Julie est :

$$\{P_1, P_2, ..., P_{2n}\}$$

Le cardinal de cet ensemble est $2n$ et la fortune de Julie à la fin des temps sera :

$$\text{card}(E) = \lim \text{card}(E(2n)) = \lim (2n) = \infty$$

Au bout de ces $2n$ jours, l'ensemble $F(2n)$ des pièces économisées par Jacques est :

$$\{P_{n+1}, P_{n+2}, ..., P_{2n}, Q_{n+1}, Q_{n+2}, ..., Q_{2n}\}$$

Le cardinal de cet ensemble est également $2n$ et la fortune de Jacques à la fin des temps sera :

$$\text{card}(F) = \lim \text{card}\, F(2n) = \lim (2n) = \infty$$

On découvre alors que la limite des ensembles $F(n)$ n'a pas nécessairement un nombre d'éléments correspondant à la limite du nombre des éléments des $F(n)$. Autrement dit : lim card $F(n)$ n'est pas forcément égal à card lim $F(n)$. C'est de présupposer inconsciemment l'égalité qui conduit à la surprise de l'histoire précédente et au sentiment d'une absurdité[2].

La situation est un peu la même que si nous étions étonnés que :

$$\sin(\pi/6 + \pi/6) \neq 1$$

alors que $\sin(\pi/6) = 1/2$: il n'y a aucun paradoxe, mais l'utilisation implicite de l'idée fausse que :

$$\sin(a+b) = \sin(a) + \sin(b).$$

2. *Voir l'encadré* Vérification des preuves *en page 24 du présent numéro.*