Mathémagique

Frédéric Gourdeau
Université Laval

Alexandra avait décidé de divertir ses élèves en ce beau vendredi après-midi. Il faut dire qu'avec le soleil qu'il faisait dehors, garder l'attention de tous n'était pas facile.

Alexandra
Aujourd'hui, je vais vous présenter deux tours de magie à saveur mathématique. Pour mon premier tour, Yannick, s'il-te-plaît, choisis une page du calendrier en avant de la classe et dessine un carré qui contient 16 dates.

Yannick s'exécute. Son carré contient les dates 4, 5, 6, 7, 11, 12, 13, 14, 18, 19, 20, 21, 25, 26, 27 et 28. Alexandra jette un coup d'œil rapide au carré et se retourne. Elle poursuit alors.

Très bien, tu vas maintenant encercler quatre dates de ton carré de la manière suivante : tu choisis une date du carré, tu l'entoures et tu barres les dates situées dans sa colonne ainsi que celles situées dans sa rangée. Tu choisis ensuite une date qui n'est pas barrée, et tu barres les dates situées dans sa colonne ainsi que celles situées dans sa rangée. Tu continues pour avoir finalement choisi quatre dates.

Quand ce sera fait, dis-le moi.

Yannick complète son choix. Il a choisi 21, 27, 5 et 11.

Dimanche	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi	
					1	2	1
3	4	5	6	7	8	9	8
10	11	12	13	14	15	16	17
17	18	19	20	21	22	23	24
24/31	25	26	27	28	29	30	30

Dimanche	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi	
					1	2	1
3	~~4~~	5	~~6~~	~~7~~	8	9	8
10	11	~~12~~	~~13~~	~~14~~	15	16	17
17	~~18~~	~~19~~	~~20~~	21	22	23	24
24/31	~~25~~	~~26~~	27	~~28~~	29	30	30

Yannick
C'est fait.

Alexandra
Alors Yannick, même si je n'ai pas vu les nombres que tu as choisis, je peux te dire que la somme des quatre nombres que tu as choisis est… 64.

Yannick fait la somme et constate bien que cela donne 64…
Plusieurs élèves sont intrigués…
Alexandra enchaîne rapidement

Impressionnés ? Je vous fais un deuxième tour… Tiens, Annick, je te donne trois dés et je me retourne. Lance les trois dés et écris les résultats au tableau.

Annick s'exécute et écrit 3, 2 et 6.
Alexandra, qui ne voit pas le tableau, poursuit.

Je te demande de faire le calcul suivant au tableau pour que tous le voient, sauf moi ! Multiplie la valeur du 1er dé par 2; ajoute 5; multiplie le résultat par 5; ajoute la valeur du 2e dé; multiplie le résultat par 10; et, finalement, ajoute la valeur du 3e dé. Tu me donneras la valeur finale.

Annick fait les calculs et obtient :

$$3 \times 2 = 6;\ 6 + 5 = 11\ ;\ 11 \times 5 = 55\ ;$$
$$55 + 2 = 57\ ;\ 57 \times 10 = 570\ ;$$
$$\text{et } 570 + 6 = 576.$$

Annick
J'ai obtenu 576.

Alexandra
Alors, je peux te dire que tu avais obtenu 3, 2 et 6.

Un élève
Est-ce vous connaissez tous les résultats par cœur?

Alexandra
Non, je ne connais pas tous les résultats par cœur! Mais je sais quoi faire pour retrouver les valeurs des dés à partir du résultat final obtenu.
À vous de jouer.

Comprendre… le carré aux dates

Le magicien regarde rapidement les deux extrémités de l'une des deux diagonales, les additionne et multiplie la somme par 2. C'est la réponse recherchée. On peut facilement faire des essais et voir que cela fonctionne bien. Mais pourquoi?

Lorsqu'on choisit un carré de dates, les dates sont toujours de la forme

a	$a+1$	$a+2$	$a+3$
$a+7$	$a+8$	$a+9$	$a+10$
$a+14$	$a+15$	$a+16$	$a+17$
$a+21$	$a+22$	$a+23$	$a+24$

Pour le choix de Yannick, on a a=4 et Yannick a choisi les dates surlignées en jaune.

On peut voir cela comme une partie d'une table d'addition : le nombre 21, qui est a+17, est le résultat de l'addition de a+3 et de 14 dans la table d'addition.

+	a	a +1	a +2	a +3
0	a	a +1	a +2	a +3
7	a +7	a +8	a +9	a +10
14	a +14	a +15	a +16	a +17
21	a +21	a +22	a +23	a +24

On veut montrer que la somme des nombres choisis est :

$$2(a + (a + 24)) = 4a + 48.$$

Comme le choix des nombres est tel que l'on prend chaque colonne et chaque ligne une fois, on a la somme des entrées de la table c'est-à-dire :

$0+7+14+21+a+(a+1)+(a+2)+(a+3)$,

ce qui donne bien $4a + 48$.

La magie à l'école

Il existe des centaines de tours de magie qui sont basés sur les mathématiques. Propriétés des nombres, symétrie, parité, arithmétique des restes et algèbre peuvent ainsi prendre vie de manière amusante. Ici, les deux tours choisis par Alexandra s'expliquent bien avec de l'algèbre, même si les explications ne sont pas nécessairement si faciles à trouver.

Deux auteurs sont à consulter pour découvrir des dizaines de tours de magie accessibles dès le début du secondaire : Martin Gardner et Dominique Soude. Voir la page Pour en savoir +.

Comprendre… le lancer des dés

Un peu d'algèbre permet de démêler le tout. Soient a, b et c les valeurs du premier, du deuxième et du troisième dé. La suite des opérations demandées par Alexandra donne :

$$((((2a + 5) \times 5) + b) \times 10) + c,$$

ce qui se ramène à $100a + 10b + c + 250$.

Si on enlève 250 au résultat, il nous reste $100a+10b+c$, c'est-à-dire le nombre qui s'écrit abc, où le chiffre des centaines est la valeur du premier dé, celui des dizaines est la valeur du deuxième dé, et celui des unités est la valeur du troisième dé. Alexandra a donc simplement fait 576 – 250 = 326, et elle a pu dire les résultats des trois dés.